CAPÍTULO 16

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS EM COMPACTOS

16.1 Introdução

Esta aula está baseada no Capítulo 16 do segundo volume do livro de Cálculo do Guidorizzi.

Nesta aula, estamos interessados em encontrar os máximos e mínimos de uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ em um conjunto $A \subseteq Dom(f)$. Quando estudamos funções da reta na reta, utilizando o Teorema de Weierstrass, temos que, se f é uma função contínua, então f atinge um máximo e um mínimo no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Isto é, existem $c, d \in [a, b]$ tais que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$. O mesmo resultado vale para funções reais de várias variáveis. Um intervalo fechado e limitado na reta é um conjunto *compacto* na reta. Em $\mathbb{R}^n$, um conjunto que é fechado e limitado, é um conjunto *compacto* em $\mathbb{R}^n$. Lembre-se que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *limitado*, se existe uma bola aberta B_0, com centro na origem, tal que $A \subseteq B_0$, e que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *fechado*, se seu complementar $\{X \in \mathbb{R}^n \,|\, X \notin A\}$ é aberto, o que equivale a dizer, que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *fechado* se ele contém sua fronteira, ∂A. Vamos então enunciar o Teorema de Weierstrass em $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 16.1.1: (Teorema de Weierstrass) Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no compacto $K \subseteq Dom(f)$, então f atinge um máximo e um mínimo em K. Isto é, existem $C, D \in K$ tais que

$$f(C) \leq f(X) \leq f(D)$$

para todo $X \in K$.

Desta forma, se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no compacto $K \subseteq Dom(f)$, sabemos que f possui um valor máximo e um valor mínimo neste conjunto. Sabemos também, que pontos no interior de um conjunto só podem ser extremantes locais se forem pontos críticos de f ou se f não for diferenciável nestes pontos. Desta forma, nosso trabalho será dividido em três etapas:

- primeiro encontraremos os pontos no interior do conjunto K que são pontos críticos de f ou onde f não é diferenciável;

- depois nos concentraremos em encontrar os pontos de máximo e mínimo na fronteira de K (por inspeção, ou por conjuntos de nível, ou por parametrização da fronteira e redução do problema a um problema na reta, ou ainda por multiplicadores de Lagrange (Seção 16.3)) e;

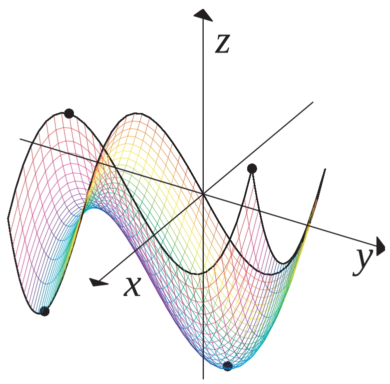
- finalmente, vamos comparar os valores da função nos pontos críticos e nos pontos onde f não é diferenciável obtidos no interior de K, com os valores da função nos pontos de máximo e mínimo que encontramos na fronteira e assim, escolher, como máximo, o maior valor encontrado e, como mínimo, o menor valor encontrado.

Vamos passar aos Exemplos.

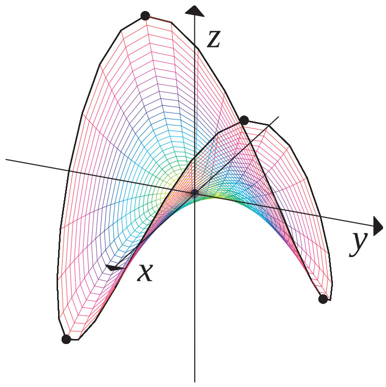
16.2 Exemplos

Vamos concentrar nossos exemplos apenas em funções reais de duas variáveis, porque foi apenas em duas dimensões que fornecemos condições suficientes para a determinação de extremantes locais em conjuntos abertos.

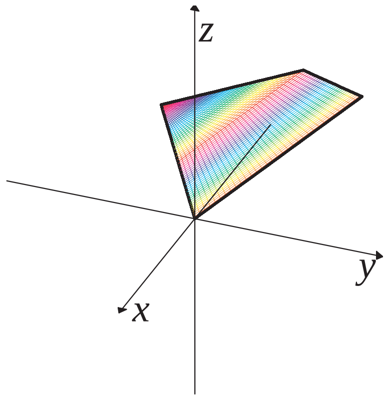
Exemplo 16.2.1: Determine os extremantes de $f(x, y) = x^3+y^3-3x-3y$ no conjunto K dado por $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$.



Exemplo 16.2.2: Determine os extremantes de $f(x, y) = xy$ no conjunto K dado por $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Exemplo 16.2.3: Determine os extremantes de $f(x, y) = 2x + y$ no conjunto K dado por $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6\}$.



16.3 Método dos Multiplicadores de Lagrange para Determinação de Candidatos a Extremantes Condicionados

Nesta seção, vamos estudar os máximos e mínimos de funções de duas variáveis em curvas e de funções de três variáveis em superfícies e em curvas. Isto é, vamos estudar os máximos e mínimos de funções de duas ou três variáveis sobre conjuntos do tipo

$$\{(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0\} \quad , \quad \{(x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = 0\}$$

$$\text{e } \{(x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\},$$

onde A é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, dependendo do caso.

Vamos começar com o teorema que fornece uma condição necessária para que um ponto seja um ponto de máximo ou um ponto de mínimo de uma função f de duas variáveis no conjunto $\{(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0\}$, onde A é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA 16.3.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f)$. Seja g uma função de classe C^1 em A e seja $B = \{(x, y) \in$

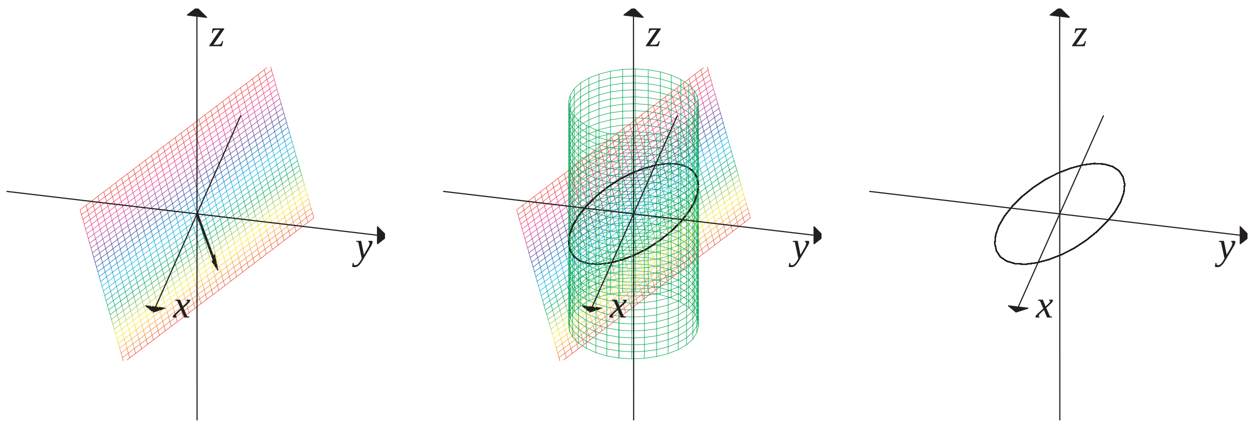
$A \,|\, g(x,y) = 0\}$. Suponha que $\nabla g(x,y) \neq \vec{0}$ para todo $(x,y) \in B$. Se $(x_0,y_0) \in B$ é um ponto de máximo ou de mínimo de f em B, então existe λ real tal que

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0).$$

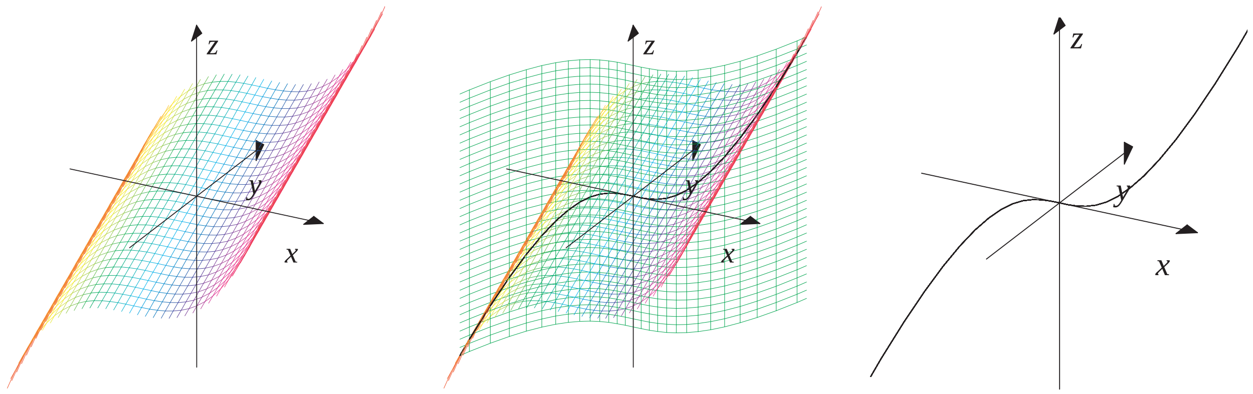
Desta forma, os candidatos a extremantes de f em B, são os pontos $(x,y) \in B$ que satisfazem o sistema abaixo para algum λ real.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 16.3.1: Determine os extremantes de $f(x,y) = 3x + 2y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$.



Exemplo 16.3.2: Estude, com respeito a máximos e mínimos, a função $f(x,y) = y + x^3$ sujeita à restrição $y - x^3 = 0$.



Exemplo 16.3.3: Determine a reta tangente à curva $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ e $y > 0$, que forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

Vamos agora passar ao teorema que fornece uma condição necessária para que um ponto seja um ponto de máximo ou um ponto de mínimo da função f de três variáveis no conjunto $B = \{(x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = 0\}$, onde A é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 16.3.2: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f)$. Seja g uma função de classe C^1 em A e seja $B = \{(x, y, z) \in A \,|\, g(x, y, z) = 0\}$. Suponha que $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ para todo $(x, y, z) \in B$. Se $(x_0, y_0, z_0) \in B$ é um ponto de máximo ou de mínimo de f em B, então existe λ real tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Desta forma, os candidatos a extremantes de f em B, são os pontos $(x, y, z) \in B$ que satisfazem o sistema abaixo para algum λ real.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 16.3.4: Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, cuja soma das coordenadas seja máxima.

Solução: A restrição do ponto pertencer ao elipsóide, traduzida pela condição do ponto satisfazer a equação $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, fornece a função g, que é dada por $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$. Observe que g é polinomial, portanto de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$, e que seu gradiente é igual a

$$\nabla g(x, y, z) \;\;=\;\; (2x \,, 4y \,, 6z)\,,$$

o qual não se anula quando o ponto (x, y, z) pertence ao elipsóide. Além disso, como a função f a ser maximizada é a soma das coordenadas, temos que

$$f(x, y, z) \;\;=\;\; x + y + z.$$

f também é polinomial, portanto de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ (em particular contínua), e que seu gradiente é igual a

$$\nabla f(x, y, z) \;\;=\;\; (1, 1, 1)\,.$$

Como f é contínua e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0\}$ é um conjunto fechado e limitado, temos, pelo Teorema de Weierstrass, que f atinge um máximo e um mínimo em B. Desta forma, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos que os extremantes devem tornar o sistema abaixo compatível

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda(2x \,, 4y \,, 6z) \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Desta forma, temos que $\lambda \neq 0$, de modo que podemos escrever x, y e z em função de λ e substituir na equação $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$. Segue portanto, que $x = \dfrac{1}{2\lambda}$, $y = \dfrac{1}{4\lambda}$ e $z = \dfrac{1}{6\lambda}$, de modo que

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{24}}.$$

Concluímos assim que os candidatos a extremante são os pontos

$$X_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{11}}\right) \text{ e } X_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{11}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{24}{11}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{11}}\right).$$

Como sabemos que f atinge um máximo e um mínimo em B (pois B é compacto, i.e. B é fechado e limitado), substituindo X_1 e X_2 em f, temos que X_1 é o ponto de máximo e X_2 é o ponto de mínimo. Portanto, o ponto procurado é o ponto $X_1 = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{24}{11}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{24}{11}}, \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{24}{11}}\right)$.

$\heartsuit$

Vamos agora passar ao teorema que fornece uma condição necessária para que um ponto seja um ponto de máximo ou um ponto de mínimo da função f de três variáveis no conjunto $B = \{(x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$, onde A é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 16.3.3: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f)$. Sejam g e h funções de classe C^1 em A e seja $B = \{(x, y, z) \in A \,|\, g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$. Suponha que $\nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z) \neq \vec{0}$ para todo $(x, y, z) \in B$. Se $(x_0, y_0, z_0) \in B$ é máximo ou mínimo de f em B, então existem λ_1 e λ_2 reais tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Desta forma, os candidatos a extremantes de f em B, são os pontos $(x, y, z) \in B$ que satisfazem o sistema abaixo para dois reais λ_1 e λ_2.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 16.3.5: Determine os pontos da curva dada pela interseção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 1$, que estão mais afastados da origem.

Solução: A restrição do ponto pertencer ao elipsóide, traduzida pela condição do ponto satisfazer a equação $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, fornece a função g, que é dada por $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$. Da mesma forma, a restrição do ponto pertencer ao plano, traduzida pela condição do ponto satisfazer a equação $x + y + z = 1$, fornece a função h, que é dada por $h(x, y, z) = x + y + z - 1$. Observe que g e h são polinomiais, portanto de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$, e que seus gradientes são dados por

$$\nabla g(x, y, z) = (2x\,, 8y\,, 2z) \text{ e } \nabla h(x, y, z) = (1\,, 1\,, 1)\,.$$

Além disso,

$$(\nabla g \times \nabla h)\,(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2z - 8y\,,\, 2x - 2z\,,\, 8y - 2x)\,,$$

que não se anula quando o ponto (x, y, z) pertence à interseção do elipsóide com o plano. Além disso, a função a ser maximizada é a distância do ponto (x, y, z) à origem, que é dada por $((x, y, z), (0, 0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Porém, como maximizar d equivale a maximizar d^2, vamos trabalhar com a função f como sendo d^2, i.e.

$$f(x, y, z) \;\; = \;\; x^2 + y^2 + z^2.$$

f também é polinomial, portanto de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ (em particular contínua), e que seu gradiente é igual a

$$\nabla f \;\; = \;\; (2x\,, 2y\,, 2z)\,.$$

Como f é contínua e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0 \text{ e } x + y + z - 1 = 0\}$ é um conjunto fechado e limitado, temos, pelo Teorema de Weierstrass, que f atinge um máximo e um mínimo em B. Desta forma, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos que os extremantes devem tornar o sistema abaixo compatível

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 8\lambda y + \mu \\ 2z = 2\lambda z + \mu \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = \mu \;\; (1) \\ 2y(1 - 4\lambda) = \mu \;\; (2) \\ 2z(1 - \lambda) = \mu \;\; (3) \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0 \;\; (4) \\ x + y + z - 1 = 0 \;\; (5) \end{cases}$$

Vamos começar supondo que $\lambda \neq 1$. Desta forma, de (1) e (3) segue que $x = z$. Substituindo que $x = z$ em (4) e (5), obtemos que

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 4 \;\; (6) \\ 2x + y = 1 \;\; (7) \end{cases}$$

De (7), temos que $y = 1 - 2x$. Sendo assim, substituindo $y = 1 - 2x$ em (6), obtemos

$$2x^2 + 4(1-2x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x^2 - 16x + 4 = 4 \Leftrightarrow 18x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}.$$

Obtemos assim os pontos $X_1 = (0\,,1\,,0)$ e $X_2 = \left(\frac{8}{9}\,,-\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$.
Vamos supor agora que $\lambda = 1$. De (1) e (3), encontramos que $\mu = 0$. Substituindo $\mu = 0$ e $\lambda = 1$ em (2), encontramos que $y = 0$. Substituindo agora $y = 0$ em (4) e (5), obtemos que

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \ \ (9) \\ x + z = 1 \ \ (10) \end{cases}$$

De (10), temos que $z = 1 - x$. Sendo assim, substituindo $z = 1 - x$ em (9), obtemos

$$x^2 + (1-x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Obtemos assim os pontos $X_3 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $X_4 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.
Concluímos assim que os candidatos a extremantes são os pontos $X_1 = (0\,,1\,0)$, $X_2 = \left(\frac{8}{9} - \frac{7}{9},1\,\frac{8}{9}\right)$ $X_3 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $X_4 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.
Como sabemos que f atinge um máximo e um mínimo em B (pois B é compacto, i.e. B é fechado e limitado), substituindo X_1, X_2 X_3 e X_4 em f, temos que
$f(X_1) = f(0\,,1\,0) = 1$,
$f(X_2) = f\left(\frac{8}{9} - \frac{7}{9},1\,\frac{8}{9}\right) = \frac{171}{81}$,
$f(X_3) = f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = 4$ e
$f(X_4) = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 4$.
Concluímos assim que $X_3 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $X_4 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são os pontos de máximo, o que significa que são os pontos mais afastados da origem e que e $X_1 = (0\,,1\,0)$ é o ponto de mínimo, o que significa que é o ponto mais próximo da origem. Portanto, os pontos procurados são os pontos $X_3 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $X_4 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\,,0\,,\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

♡